INSTITUTO JUAN PABLO II
Av. Sáenz Peña 576
TEL: 0381- 4205711
Institutojuanpabloii@gmail.com
www.instjuanpabloii.com.ar

Materia: Matemática
Profesora: Nisoria, Carolina
Curso: 6° año B
Bibliografía actual: Activados 3. Puerto de palos. (Periodo de diagnóstico). Luego continuamos con libro de ingreso a ingeniería.

<u>Trabajo Práctico N° 7</u>

<u>CONTROL DE ACTIVIDADES.</u>

<u>Actividad. Puntos 7, 10, 12 y 13</u>

Operaciones

En el conjunto de los reales se definen todas las operaciones antes nombradas: suma, resta, producto y cociente. A continuación te explicaremos algunas propiedades de éstas que te ayudaran a resolver problemas que te plantearemos.

Elementos neutros de la suma y el producto Los elementos 0 y 1 se dicen que son neutros en la suma y el producto respectivamente, ya que si son sumados o multiplicados por estos no afectan al número, es decir, dado a un número real:

$$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$$

Ejemplos:

$$6+0=6 \qquad 6\cdot 1=6$$

Propiedad conmutativa La suma y el producto son operaciones **conmutativas**, es decir que para todos a y $b\in\mathbb{R}$, dos números cualesquiera pertenecientes a los reales, se verifica que:

$$a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

Ejemplos:

$$4+5=5+4=9 \qquad 2\cdot 3=3\cdot 2=6$$

Propiedad asociativa La suma y el producto son operaciones **asociativas**, es decir que para a, b y $c\in\mathbb{R}$, se verifica que:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Ejemplos:

$$2+(4+5)=2+9=11 \qquad (2+4)+5=6+5=11$$
$$2\cdot(3\cdot 3)=2\cdot 9=18 \qquad (2\cdot 3)\cdot 3=6\cdot 3=18$$

Propiedad distributiva El producto es asociativo respecto a la suma, es decir que para a, b y $c\in\mathbb{R}$, se verifica que:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Ejemplos:

$$2\cdot(4+5)=2\cdot 4+2\cdot 5=8+10=18$$
$$-4\cdot(8-1)=-4\cdot 8+(-4)\cdot(-1)=-32+4=-28$$

Observemos ésta expresión:

$$a^{-1}\cdot(b+c)=a^{-1}\cdot b+a^{-1}\cdot c$$

Por la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, ésto es lo mismo que

$$\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$$

Vale la propiedad distributiva del cociente respecto de la suma. Esto no quiere decir que puedas realizar esto:

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \quad \text{¡¡INCORRECTO!!}$$

INSTITUTO JUAN PABLO II
Av. Sáenz Peña 576
TEL: 0381- 4205711
Institutojuanpabloii@gmail.com
www.instjuanpabloii.com.ar

Ejemplos:

$$\frac{-3+4}{21} = \frac{-3}{21} + \frac{4}{21} \quad \text{Correcto}$$

$$\frac{-3}{5+8} = \frac{-3}{5} + \frac{4}{8} \quad \text{INCORRECTO}$$

Presta atención donde utilizar esta propiedad:

$$2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \quad \text{Correcto}$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) \neq 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \quad \text{INCORRECTO}$$

Propiedad uniforme Establece que si uno aumenta o disminuye una misma cantidad en ambos miembros en una igualdad, ésta se conserva. Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$ si:

$$a = b \quad \text{entonces} \quad a + c = b + c$$

$$a = b \quad \text{entonces} \quad a \cdot c = b \cdot c$$

$$\text{si} \quad c \neq 0 \quad \text{y} \quad a = b \quad \text{entonces} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Propiedades de la potencia

Producto y cociente de potencia de igual base Sean a real, n y m números enteros, se cumple que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, a \neq 0$$

Ejemplos:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 \qquad \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

Potencia de potencia Sean a real, n y m números enteros, se cumple que

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos:

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \qquad (2^{-3})^4 = 2^{-3 \cdot 4} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

Propiedad distributiva Esta propiedad es solo respecto del producto y del cociente. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Potencias con exponentes racionales Hasta ahora vimos que el exponente en una potencia siempre debe ser un número entero. Pero esto no necesariamente debe ser así, por ello introduciremos el caso en que el exponente sea un número racional, es decir una fracción.

Dados a, p y $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, se define

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Ejemplos:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \qquad (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)} = -3$$

No olvides que en este caso tendremos algunas restricciones para a ya que esto inv[...] una raíz. Las condiciones son:

- Si $\frac{p}{q}$ es un número negativo, a no debe ser cero. Les mostramos por qué

$$a^{\frac{-p}{q}} = (a^{-1})^{\frac{p}{q}} \quad \text{por potencia de potencia}$$
$$= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Por lo tanto si $a = 0$ queda un cociente con 0 en el denominador y eso no está definido.

- Si q es un número par y p y q son primos, es decir no tienen factores comunes, a debe ser no negativo ($a \geq 0$). Para explicar esto veamos los siguientes ejemplos:

  $$(-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3} \quad \text{3 y 2 son primos y forman una fracción irreducible.}$$

  $(-2)^3 = -8$ es un número negativo. No está definida la raíz de número negativos.

  Otro ejemplo es el siguiente caso:

  $$(-2)^{\frac{2}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \quad \frac{2}{4} \quad \text{se reduce a} \quad \frac{1}{2}$$

  Obteniendo nuevamente raíz de un número negativo lo cual no existe en los reales.

- En el caso anterior, si $\frac{p}{q}$ es negativo, a necesariamente debe ser distinto de cero y un número positivo.

Todas las propiedades de potenciación son validas para exponentes racionales.

Propiedades de la radicación

Teniendo en cuenta la definición de potencia con exponente radical, todas las propiedades de la potenciación son validas para la radicación.

Ejemplos:

- Producto y cociente de igual radicando

  $$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$$

- Radicando de radicando, los índices se multiplican

  $$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$$

- Propiedad distributiva respecto del producto y cociente

  $$\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

Simplificación de índice con exponente Supongamos que tienes ésta expresión:

$$\sqrt{2^2} = 2 \quad \text{puedes simplificar exponente con el índice ya que son iguales}$$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Pero debes prestar atención, ya que cuando simplificas las operaciones deben estar definidas.

No puedes simplificar $\sqrt[4]{(-3)^4}$

ya que $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$

INSTITUTO JUAN PABLO II
Av. Sáenz Peña 576
TEL: 0381- 4205711
Institutojuanpabloii@gmail.com
www.instjuanpabloii.com.ar

Actividad. Punto 17. Pág. 3

17. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=$

b) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$

c) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):\frac{5}{2}\right]=$